a) Calculer $\varphi'(x)$ et prouver que $\varphi'(x) = 3f^2(x) - 2f(x)$

b) Calculer le volume du solide (S) obtenu par la rotation de $\Gamma$ autour de l'axe des abscisses où $\Gamma = \left\{ M(x,y) / y = f(x) \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

## Exercice 13 :

A) Soit la fonction f : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to IR$ ; $x \mapsto tgx$

et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/a) Etudier les variations de f.

b) Soit $\Delta$ la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $x_0 = 0$. Etudier les positions relatives de $C_f$ et $\Delta$.

c) Tracer $C_f$.

2°/a) Montrer que f est une bijection.

b) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur IR.

c) Prouver que pour tout $x \in IR$ : $f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

3°/ Calculer alors $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

B) Soit $n \in IN^*$ et $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ et $a_0 = 1$.

1°/ Montrer que : $a_{n+1} - a_n = -\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$.

2°/ Montrer que la suite $(a_n)$ est convergente.

3°/a) Prouver à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in IN^*$ on a : $a_{n+1} = \frac{(2n+2)a_n}{3+2n}$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ : $a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.